

Kaotikus rendszerek minimálmodelljeinek vizsgálata

Doktori értekezés tézisei

Szerző: Vanyó József



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Fizika Doktori Iskola

Statisztikus fizika, biológiai fizika és
kvantumrendszerek fizikája doktori program

A Doktori Iskola vezetője: Dr. Palla László, egyetemi tanár
A Doktori Program vezetője: Dr. Kürti Jenő, egyetemi tanár

Témavezető: Dr. Tél Tamás, egyetemi tanár
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Elméleti Fizikai Tanszék

2014

Bevezetés

Egy rendszer minimálmodelljén azt a legegyszerűbb modellt értjük, mely a rendszer lényegi viselkedését legalább minőségileg reprodukálni vagy magyarázni tudja. A rendszer egyszerűsége több dologban is megnyilvánulhat: egyrészt a rendszert felépítő elemek szempontjából azok kis számában és egyszerűségében (pl. tömegpontok), másrészt a modell elemeinek viselkedését leíró szabályok vagy kölcsönhatások szempontjából, azok egyszerű leírhatóságában és szintén kis számában. Egy megalkotott minimálmodell értékét tovább növeli, ha az nem csak kvalitatívan írja le a valóságot, hanem kvantitatívan is helyes jóslatokkal szolgál.

Mint az a dinamikai rendszerek elméletében megszokott, egymástól fizikailag teljesen eltérő felépítéssel rendelkező rendszerek is rendelkezhetnek dinamikailag hasonló tulajdonságokkal. A doktori dolgozat célja, hogy két valóságos, számos dinamikai tulajdonságukban megegyező, fizikailag azonban teljesen eltérő rendszer viselkedésének főbb jellemzőit, az azokról alkotott minimálmodellek segítségével megértsük.

Az először vizsgált jelenséget az égi mechanikai területéről választottuk, és a Föld-Hold rendszerben jelenlévő árapályhatás inspirálta: miért mutatja Holdunk mindig ugyanazt az arcát felénk? Célunk általánosan egy hold deformációja, forgása, pályájának változása és a deformáció közbeni disszipáció közti kapcsolatok feltárása egy minimálmodell segítségével. A modell tulajdonképpen nem más, mint az égi mechanika síkbeli forgás-keringés problémájának egy több szempontból kibővített változata. Modellünkben egy rögzített tömegpont (bolygó) körül kering egy test (hold), amely két egyenlő tömegű tömegpontból áll. A holdat felépítő két tömegpont disszipatív rugóval van összekötve, és feltételezzük, hogy a bolygó tömege és a pálya mérete jóval kisebb a hold tömegénél és méreténél.

A másik vizsgált rendszer áramlástani jellegű. Ezt a vizsgálatot egy könnyen elvégezhető kísérlet motiválta. Az áramlási tér egy hengeres edényben létrehozott örvény, melyben egy, a víznél kisebb sűrűségű műanyag gömb (részcseke) mozgását szeretnénk megérteni. Az ilyen részecskék mozgásának különlegessége, hogy örvényes áramlás esetén az úgynevezett anticentrifugális erő hatására a részecskék az örvények belseje felé tartanak.

A két rendszer közös tulajdonsága, hogy nemlineáris, gerjesztett rendszerek. Az első esetben a forgó és deformálódó hold a gerjesztett rendszer, és a gerjesztést a hold keringési pályája határozza meg. A második esetben az áramlási tér a gerjesztés, ami meghatározza a gömb mozgását. Mindkét rendszerben megfigyelhető kaotikus viselkedés, amely legtöbbször

tranziens tulajdonságú. A tranziens tulajdonság ellenére előfordul a permanens káosz jegyeit magán hordozó viselkedés is. További közös tulajdonság, hogy ezek a gerjesztett rendszerek képesek visszahatni a gerjesztésükre. Ez a visszahatás az első problémában a hold pályájának forgási állapottól függő időbeli változását, míg a második problémában az áramlási térnek a gömb jelenléte által kiváltott megváltozását jelenti.

Mindkét rendszerről elmondható, hogy tanulmányozásuk a tudomány aktuálisan kutatott területére vezet. A forgás-keringés probléma vizsgálata más-más aspektusból szinte rendszeresen előkerül a szakirodalomban [A1, A2], és igen sok minimálmodell megkonstruálása kapcsolható hozzá. Az elméleti-kísérleti vizsgálatok száma a folyadéknál nehezebb részecskék esetén kiegyensúlyozottnak mondható [A3]. A folyadéknál könnyebb részecskék esetén azonban a kísérleti eredmények és publikációk száma meglehetősen korlátozott, és jóval elmarad az elméletiekéhez képest [A4-A5]. Ennek oka valószínűleg az, hogy egy laboratóriumi méretű áramlási kísérletben a felhajtóerő hatására a részecskék hamar a felszínre kerülnek. Mindez a fenti áramlástan probléma kísérleti és elméleti vizsgálatának relevanciáját erősíti.

Alkalmazott vizsgálati módszerek

A vizsgálatok során a numerikus szimulációk domináltak, amelyek negyedrendű Runge—Kutta-módszeren [A6] alapultak. Ezen numerikus szimulációkat gyakran egészítette ki papíron kézzel végrehajtott analitikus számolás. Egyes vizsgálatink háttérében – a korábban már nemperiodikusan gerjesztett rendszerek vizsgálatára sikeresen alkalmazott [E1] – snapshot attraktorok módszere húzódtott meg. Bár magának a módszernek az alkalmazása nem volt szükséges, mégis annak koncepciója, mint vezérlő elv, fontos szerepet játszott bizonyos eredmények értelmezésénél.

Az áramlástan rendszer esetén a megalkotott modell paramétereinek megválasztásához és helyességének ellenőrzéséhez kísérleti vizsgálatok is szükségesek voltak. Az áramlási kísérletet átlátszó hengerben elvégezve a részecskemozgásról videofelvétel készült. A videofelvétel digitalizálásával, és két – az adott célra specializált – képfelismerő program elkészítésével lehetőség nyílt a részecskemozgás vetületi idősorának, illetve az áramlásban megjelenő tölcser mozgási jellemzőinek meghatározása.

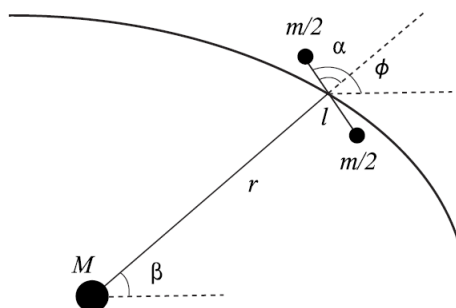
Az áramlási tér turbulens voltának [A7] részecskére való hatását a vizsgálatok során a részecskemozgásban megjelenő zajként értelmeztük. Módszerünk alapján ezt a zajt „mesterségesen”, pillanatnyi lökdösések segítségével adtuk hozzá a részecskemozgáshoz.

Ezen módszer felveti azt a kérdést, hogy mikor, milyen feltételek fennállása esetén helyes ez az értelmezés, és ha helyes, akkor a lökdösés milyen tulajdonságokkal kell rendelkezzen ahhoz, hogy a valóság leírására alkalmas legyen a módszer.

Tézisek

1. Az égi mechanikai modell megalkotása és a forgásállapotok osztályozása

- a. Megalkottunk egy nem konzervatív égi mechanikai modellt, amelynek segítségével a forgás-keringés probléma és a pálya kikörösödésének problémája (az excentricitás és a fél nagytengely csökkenése) együtt, konzisztens módon vizsgálható. A modell a következő (lásd 1. ábra): egy rögzített pontszerű égitest (bolygó) körül kering egy két tömegpontból álló disszipatív rugóval összekötött másik égitest (hold). A modell a bolygó és a hold tömegpontjai között Newton-féle gravitációs erőhatással, míg a hold tömegpontjai között csak a rugótól származó erőhatással számol. A rugóerő a rugó hosszváltozásával arányos, de tartalmaz egy, a rugó hosszváltozási sebességével arányos disszipatív erőt is. A megalkotott modell a létező legegyszerűbb dinamikai modell, amelyben a fenti jelenségek természetes módon jelennek meg [T1, C1].



1. ábra: A forgás-keringés probléma vizsgálatára megalkotott modell vázlata és annak általános koordinátái: r – a hold tömegközéppontjának bolygótól mért távolsága, β – a hold vezérsugarának irányát meghatározó szög, l – a holdat alkotó két tömegpont távolsága, ϕ – a hold tengelyének irányát megadó szög, α – a vezérsugár és a hold tengelye által bezárt szög.

- b. A hold forgási állapotait osztályoztuk. Az osztályozás szerint a forgási állapot lehet: permanens kaotikus jellegű, tranziens kaotikus, 1:1 rezonancia, nem 1:1 vagyis úgynevezett magasabbrendű rezonancia [T2]. Megadtuk az okait a különböző forgási állapotok jellemzőinek és a köztük történő átmeneteknek.
- c. Megmutattuk, hogy ha a hold rezonanciaállapotban van, akkor a fenti rendszerben a forgási állapot jellemzésére nem elegendő az átlagos keringési idő és az átlagos forgási idők

hányadosát használni, mivel létezhetnek olyan dinamikai szempontból különböző módon viselkedő állapotok, amelyeket a fenti jellemzés nem képes megkülönböztetni. A rezonanciaállapotok osztályozására ezért a fenti módszer helyett egy olyan másikat javasolunk, amely képes megkülönböztetni ezeket a dinamikailag eltérő viselkedésű állapotokat [T2, C5].

2. Az 1:1 rezonancia

- a. Az 1:1 rezonancia kitüntetett szerepet játszik a rendszerben. Ennek egyik oka az, hogy ez a rendszer egyetlen attraktorának rezonanciaállapota. Az attraktorállapotot az 1:1 rezonancia és a kör alakú pálya jellemzi [T2, C3].
- b. A rendszer ebben az állapotban minőségileg másként viselkedik, mint az ettől különböző állapotokban. Ez a viselkedés legegyszerűbben a pálya energiájának időbeli viselkedésével írható le, amely időben exponenciálisan csökken, eltérően a többi állapotbeli viselkedéstől. Megadjuk az exponenciális viselkedés magyarázatát. A pálya energiáján kívül egyes pályaelemek (excentricitás, fél-nagy tengely) időbeli változása is exponenciális. Az exponensekre a rendszer paramétereitől függő analitikus formulát adunk meg [T2, C5].
- c. Ha a hold pályája kör alakú (kis excentricitás), akkor a tapasztalataink szerint az 1:1 rezonanciaállapot körüli libráció lecsengésének karakterisztikus ideje nem monoton függvénye a disszipáció erősségének. Ennek a magyarázatát is megadtuk.
- d. Kimutattuk, hogy nem igaz az az állítás, hogy ha a rendszer belekerült az 1:1 rezonanciaállapotba – úgy, hogy a pálya alakja még nem kör –, akkor abból a rendszer további időfejlődése során nem képes kilépni, a kilépés bizonyos feltételek fennállása esetén igenis lehetséges [T2].

3. Magasabbrendű rezonanciák

- a. Ezekben a rezonanciaállapotokban a pálya energiájának időbeli viselkedése általában lineáris. Ezek alapján megadjuk a pályaenergiától függő pályaelemek időbeli viselkedésének tipikus alakját. Ezen pályaelemek időbeli változásait mennyiségileg is jellemeztük [T2].
- b. Kvantitatív feltételt fogalmaztunk meg egy rezonancia fennmaradására. A feltétel lényege, hogy a rezonancia nem marad fenn, ha a hold nem kap elegendő energiát a tömegközépponti mozgástól [T2].
- c. A modell vizsgálatával a rezonanciaállapotok megszűnésének több módját és azok okait is felderítettük.

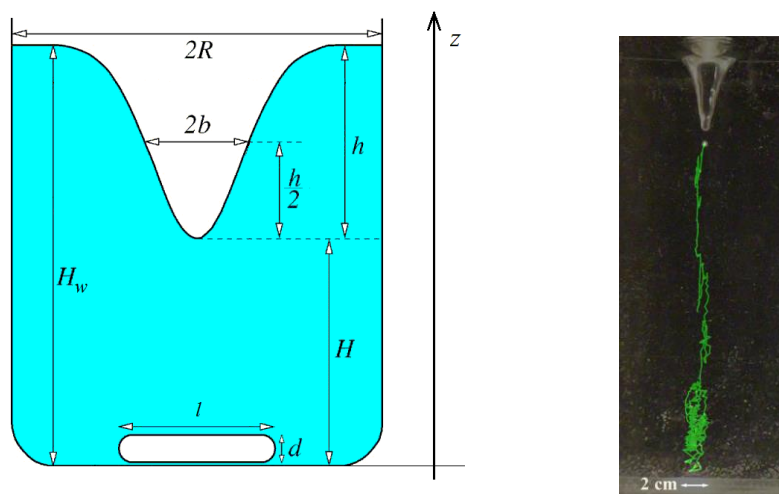
4. Kaotikus viselkedés

Mivel a rendszer egyetlen nemkaotikus attraktorral rendelkezik, ezért a rendszerben a kaotikus viselkedés nem lehet állandó, csakis ideiglenes. Ennek ellenére – a pályaelemek lassú változásának következtében – két eltérő tulajdonságú kaotikus viselkedést figyeltünk meg. Megadtuk a két eltérő jellegű kaotikus viselkedés okát. Megmutattuk, hogy ez a kétfajta viselkedés egyrészt a „klasszikus” tranziens, másrészt a „klasszikus” permanens káosz tulajdonságait hordozza [T2].

- a. A permanens káosz tulajdonságú kaotikus viselkedést befagyasztott pályaelemek esetén elkészített kaotikus attraktorok segítségével mutattuk ki [T2]. Megmutattuk, hogy a megjelenő kaotikus attraktorok strukturálisan instabilak. Ez egyben magyarázata a pályaelem-változások során bekövetkező rezonáns és kaotikus viselkedések közötti hirtelen váltásoknak [T2]. Levezettük a krízis során megszűnt permanens kaotikus jellegű állapot utáni tranziens kaotikus állapotban való tartózkodás idejének eloszlásfüggvényét.
- b. A tranziens káosz tulajdonságú kaotikus viselkedést kezdeti állapotokhoz tartozó élettartamok vizsgálatával igazoltuk, és több ideiglenesen jelenlévő fixpont attraktor vonzási határainak fraktál tulajdonságával magyaráztuk [T2].

5. Mérési eredmények az áramlási problémában

Méréseket végeztünk annak érdekében, hogy modellt alkossunk egy függőleges tengelyű örvény (tornádó) áramlási terének és az abban lezajló részecskemozgás leírására. Kísérletileg vizsgáltuk az áramlást keltő keverő frekvenciájának függvényében az áramlás tölcsérének mozgását, valamint az áramlásba helyezett könnyű részecske mozgását (lásd 2. ábra).



2. ábra: Bal oldali kép: A hidrodinamikai rendszer sematikus ábrázolása a modell vizsgálata során használt legfontosabb paraméterek jelölésével. Jobb oldali kép: a könnyű részecske egy valódi trajektóriájának rekonstrukciója a videofelvételek alapján.

- a. A tölcsermozgás vizsgálatának eredményeként becslést tudtunk adni az áramlást jellemző mennyiségekre, és az áramlás periodikus viselkedésének tulajdonságaira (periódusidő és relatív amplitúdó) következtethettünk.
- b. A részecskemozgás vizsgálatának eredményeként: 1. megbecsülhettük a leáramlási sebességet. Előfordulási statisztikákat és élettartamokat tudtunk meghatározni, melyek alkalmasak voltak a megalkotott modellekben szereplő paraméterek meghatározására. 2. Korrelációkat találtunk a részecskemozgás függőleges komponensének vizsgálatakor. 3. A részecske mozgásának „zajosságát” statisztikai módszerekkel vizsgáltuk. Ezen vizsgálatok során magasságfüggést találtunk, amelynek fontos szerepe van a részecskemozgás statisztikai tulajdonságainak kialakulásában.

A kísérleti mérések alapján egy modellsorozatot alkottunk, amelynek minden egyes rákövetkező eleme a kísérleti rendszer újabb és újabb fontos tulajdonságával rendelkezik [T3, C2].

6. A lamináris modell

A megalkotott modell alapján numerikus szimulációkat hajtottunk végre. A részecske mozgását numerikusan vizsgáltuk először időtől független, majd időtől függő modelláramlásban.

- a. Időtől független modelláramlás esetén: felderítettük az időtől független áramlásban az attraktorok főbb típusait és azok stabilitásának feltételeit [T3, C2].
- b. Időfüggő modelláramlás esetén: 1. megmutattuk, hogy az időtől periodikusan függő hengerszimmetrikus áramlásban mind permanens, mind tranziens kaotikus viselkedés lehetséges. Ez a kaotikus viselkedés azonban nem nevezhető dominánsnak, a tipikus viselkedés a rendszerben nem kaotikus. 2. Beláttuk, hogy a kísérletileg megfigyelt kaotikusnak tűnő részecskemozgás nem az áramlási tér periodikus időfüggésének következménye, mert a kísérletileg megfigyelt részecsketrajektóriák minőségileg eltérnek a szimulációkban kapottaktól [T3, C4].

7. A turbulencia figyelembevétele

A modellsorozat újabb eleme szerint a részecske mozgását az áramlási térben jelenlévő és gyorsan mozgó kis örvények is befolyásolják. Amikor az örvények elérik a részecskét, megváltoztatják annak sebességét. A modellben ezt a jelenséget úgy jelenítjük meg, hogy ugrásszerűen megváltoztatjuk a részecske sebességét. A sebességváltozások tulajdonságait az

alábbiak szerint választottuk: a sebességváltozások pillanatszerűek, irányuk térben egyenletes eloszlású, időpontjaik közt eltelt időközök exponenciális eloszlásúak, a sebességváltozás nagysága normális eloszlású nulla várható értékkel. Az eloszlás szórása a részecske térbeli elhelyezkedésének empirikus függvénye.

A részecske sebességének ilyenfajta megváltoztatása úgy is felfogható, hogy a részecskemozgáshoz zajt adtunk hozzá. A zaj jellemzőit a kísérleti adatok egy részének felhasználásával határoztuk meg, illetve hangoltuk be. A sebességváltozások fenti tulajdonságait részletesen vizsgáltuk, és jelentős eltéréseket tapasztaltunk a kísérletileg mért adatoktól más tulajdonságok feltételezésével. A korrelációk közvetlen beépítése a modellbe nem volt szükséges, elegendő volt azok átlagos figyelembevétele.

Modellünk jóságának megállapítására, a korábban nem beépített adatokat és statisztikákat használtuk fel. A szimulációs és mérési eredményeink meglepően jó egyezést mutatnak, így a megalkotott „zajos” modellt fogadtuk el a kísérleti rendszer minimálmodelljének [T3, C6, C7].

Összefoglalás

A doktori értekezésben két dinamikai szempontból hasonló – gerjesztett, nemlineáris – rendszer viselkedésének legfontosabb tulajdonságait derítettük fel. Az égi mechanikai rendszer vizsgálatával annak speciális tulajdonságaira, és azokon túl a rezonanciaállapotok új osztályozásának szükségességére is fény derült. Az új osztályozási módszer képes megkülönböztetni olyan minőségileg különbözőképp viselkedő rezonanciaállapotokat is, amelyek a régi terminológia szerint azonosak voltak. A modell vizsgálatával a forgási állapotok és az azok közti átmenetek osztályozása is lehetségessé vált, nem beszélve arról, hogy mind az állapotok, mind az átmenetek egyes tulajdonságai is felszínre kerültek. Egyelőre semmi nem utal arra, hogy feltételezzük, ezen dinamikai osztályok tagjai (állapotok és átmenetek) valódi rendszerekben nem jelenhetnek meg a vizsgálatok során tapasztalt vagy azokhoz nagyon hasonló tulajdonságokkal. Mindezek fényében elmondható, hogy a vizsgált minimálmodell a valódi rendszerek számos tulajdonságával rendelkezik, és így ezek a tulajdonságok a modell segítségével megérthetők.

A hidrodinamikai rendszerről sikerült felállítani egy olyan modellsorozatot, amelynek minden eleme a kísérleti rendszer újabb és újabb fontos tulajdonságát írja le, s ennek utolsó eleme a kísérletekkel összhangban van. Kiderült, hogy a részecskemozgás lényege a Navier—Stokes-egyenletek direkt numerikus szimulációja nélkül is megérthető. A felállított

minimálmodell a kiátlagolt áramlási teret olyan helyen írja le – az áramlás közepén –, ahol ez a leírás eddig a közvetlen kísérleti módszerek használhatatlansága miatt nem volt lehetséges. Sikerült a vizsgált áramlási tér közepéről kimutatni, hogy átlaga itt parabolikus sebességprofilú.

Hivatkozások

Általános irodalom

- [A1] J. Wisdom (2004): *Spin-orbit secondary resonance dynamics of Enceladus*, Astron. J., **128**, 484.
- [A2] A. C. M. Correia és J. Laskar (2010): *Tidal evolution of exoplanets*, in *Exoplanets*, Sara Seager (Editor), University of Arizona Press.
- [A3] F. Toschi és E. Bodenschatz (2009): *Lagrangian properties of particles in turbulence*, Annu. Rev. Fluid Mech., **41**, 375.
- [A4] R. Toegel, S. Luther és D. Lohse (2006): *Viscosity destabilizes bubbles*, Phys. Rev. Lett. **96**, 114301.
- [A5] V. Garbin, et al. (2009): *History force on coated microbubbles propelled by ultrasound*, Phys. Fluids **21**, 092003.
- [A6] W. H. Press, et al. (1992): *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press.
- [A7] S. B. Pope (2000): *Turbulent Flows*, Cambridge University Press.

A doktori képzés előtti publikáció

- [E1] J. Vanyó és T. Tél (2007): *Dynamics of chaotic driving: Rotation in the restricted three-body problem*, Chaos **17**, 013113.

A tézisek alapjául szolgáló publikációk

- [T1] B. Escibano, J. Vanyó, I. Tuval, J. H. E. Cartwright, D. L. González, O. Piro és T. Tél (2008): *Dynamics of tidal synchronization and orbit circularization of celestial bodies*, Phys. Rev. E **78**, 036216.
- [T2] J. Vanyó, B. Escibano, J. H. E. Cartwright, D. L. González, O. Piro és T. Tél (2011): *A minimal dynamical model for tidal synchronization and orbit circularization*, Celest. Mech. Dyn. Astr., **109** (2), 181.

- [T3] J. Vanyó, M. Vincze, I. M. Jánosi és T. Tél (2014): *Chaotic motion of light particles in an unsteady three dimensional vortex: experiments and simulation*, Phys. Rev. E **90**, 013002.

A tézisek alapjául szolgáló poszterek és konferencia előadások

- [C1] B. Escibano, J. Vanyó, I. Tuval, J. H. E. Cartwright, D. L. González, O. Piro és T. Tél (2008): *Dynamics of tidal synchronization and orbit circularization of celestial bodies* (szóbeli előadás), Dynamics Days 2008, Delft, Hollandia.
- [C2] J. Vanyó, I. M. Jánosi és T. Tél (2008): *Chaotic motion of light particles in an unsteady three dimensional vortex: experiments and simulation* (poszter), Dynamics of Inertial Particles: From Ocean and Atmosphere to Planets (DIPOAP 2008), Drezda, Németország.
- [C3] J. Vanyó, B. Escibano, J. H. E. Cartwright, D. L. González, O. Piro és T. Tél (2009): *Toy model for tidal synchronization and orbit circularization* (poszter), The Fifth International Meeting on Celestial Mechanics (CELMEC V), Viterbo, Olaszország.
- [C4] J. Vanyó, I. M. Jánosi és T. Tél (2009): *Chaotic motion of light particles in an unsteady three dimensional vortex: experiments and simulation* (szóbeli előadás), Dynamics Days 2009, Göttingen, Németország.
- [C5] J. Vanyó, B. Escibano, J. H. E. Cartwright, O. Piro, T. Tél és D. L. González (2010): *Toy model for tidal synchronization and orbit circularization* (poszter), Dynamics Days 2010, Bristol, Egyesült Királyság.
- [C6] J. Vanyó, M. Vincze, I. M. Jánosi és T. Tél (2012): *Chaotic motion of light particles in an unsteady three dimensional vortex: experiments and simulation* (szóbeli előadás), Turbulence, transfer, transport, and transformation (T4), Budapest, Magyarország.
- [C7] J. Vanyó, M. Vincze, I. M. Jánosi, T. Tél (2014): *Chaotic motion of light particles in an unsteady three dimensional vortex: experiments and simulation* (szóbeli előadás), Experimental Chaos and Complexity (ECC2014), Aberdeen, Egyesült Királyság.